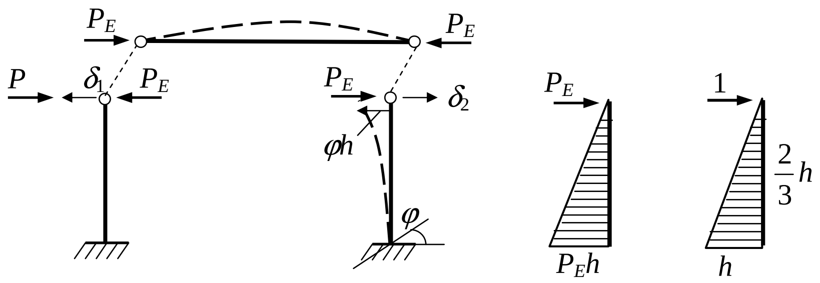


Rys. 4.10b

Przemieszczenia δ_1, δ_2, Δ w zadaniu liniowo-sprężystym wynoszą

$$EJ\delta_1 = \frac{(P_E - P)h^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{(P_E - P)h^3}{3}$$

$$EJ\delta_2 = \frac{P_E h^3}{3}$$

$$\Delta = \frac{P_E l}{EF}$$

stąd

$$\frac{(P_E - P)h^3}{3EJ} + \frac{P_E h^3}{3EJ} + \frac{P_E l}{EF} = \alpha_T \Delta T l + \varphi h$$

Z równania tego można wyznaczyć jedną z wartości krytycznych np.(ΔT, φ, P) przy pozostałych parametrach ustalonych.

Jeżeli chcemy natomiast przeanalizować przypadek niezależnego przyrostu wszystkich trzech parametrów tj. $\Delta T \rightarrow \alpha_1 \Delta T$, $\varphi \rightarrow \alpha_2 \varphi$, $P \rightarrow \alpha_3 P$ do utraty stateczności, to należy wyliczyć P_E z warunku nierozdzielności

$$P_E K = \left(\alpha_T \Delta T l + \varphi 4 + \frac{P h^3}{EJ} \right) \qquad K = \frac{l}{EF} + \frac{2h^3}{3EJ}$$

stąd

$$\frac{\alpha_T \Delta T l}{P_E K} + \frac{\varphi h}{P_E K} + \frac{P h^3}{3 P_E K E J} = 1$$

wprowadzając nowe zmienne

$$\overline{\Delta T} = \frac{P_E K}{\alpha_T l}, \quad \overline{\varphi} = \frac{P_E K}{h}, \quad \overline{P} = \frac{3 P_E K E J}{h^3}$$

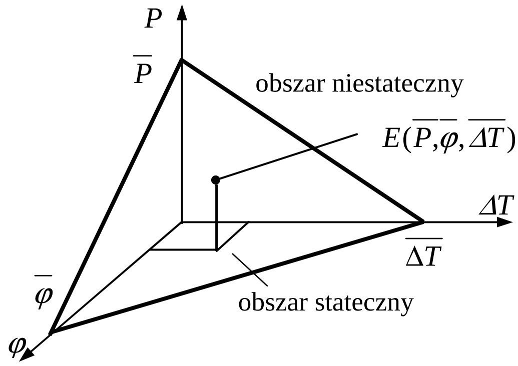
otrzymamy

$$\frac{\Delta T}{\overline{\Delta T}} + \frac{\varphi}{\overline{\varphi}} + \frac{P}{\overline{P}} = 1$$

warunek parametrycznej utraty stateczności. Warunek ten przedstawia płaszczyznę w układzie osi $\Delta T, \varphi, P$, której osiągnięcie prowadzi do wyboczenia pręta 1-2, a krytyczną wartość parametrów $\Delta T, \varphi$ i P określa więc zależność

$$\alpha_1 \overline{\Delta T} + \alpha_2 \overline{\varphi} + \alpha_3 \overline{P} = 1$$
$$\alpha_i \in [0,1]$$

spełniająca warunek parametrycznej utraty stateczności.

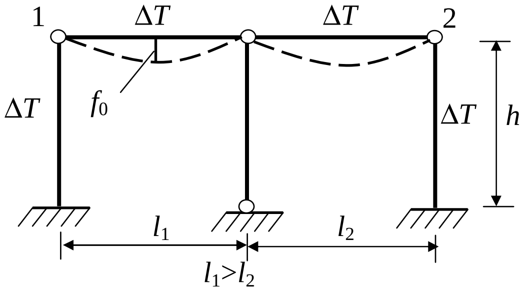


Rys. 4.10c

ZADANIE 4.11.

Rama stalowa przedstawiona na rys. 4.11a poddana jest działaniu intensywnego przyrostu temperatury ΔT w czasie pożaru. Zakres tego wzrostu powoduje, iż stal zaczyna pełzać w zakresie nieliniowym. Deformacje układu są sumą odkształceń sprężystych, lepkich i termicznych. Należy określić krytyczny wzrost temperatur tj. taki proces zmian temperatur, który kończy się utratą stateczności pręta. Równania fizyczne mają postać

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + A(T,t)(\sigma)^m + \alpha_T \Delta T$$



Rys. 4.11a

Dane: h, l_1, l_2, ε-ε_0=$A\sigma^m$

$$\kappa - \kappa_0 = A\left(\frac{M}{J(N+1)}\right)^m, \quad N = \frac{1}{m}, \qquad J(N+1) = \int_F z^{L+1} dF$$

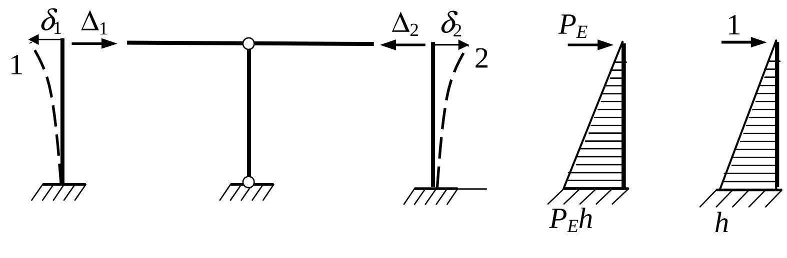
$$\varepsilon - \varepsilon_0 = A\left(\frac{N}{F}\right)^m$$

$$(Pf_0)^m = P_K f_0, \quad P = \frac{1}{f_0}(P_K f_0)^{\frac{1}{m}}, \quad P_R = \frac{\pi^2 [J(N+1)]^m}{Al^2}$$

Rozwiązanie:

Przedstawimy najpierw oszacowanie temperatury krytycznej ΔT w zadaniu sprężystym, a następnie poszukiwać będziemy procesu narastania temperatury w teorii starzenia.

Podstawą rozważań jest tu spełnienie warunków nierozdzielności odkształceń, kiedy to skrócenia prętów i ugięcia słupów 1 i 2 pochodzące od siły krytycznej P_E – muszą być skompensowane wydłużeniami termicznymi,



Rys. 4.11b

$$\left(\delta_1+\Delta_1\right)+\left(\delta_2+\Delta_2\right)=\alpha\,\Delta T l_1+\alpha\,\Delta T l_2$$
$$EJ\delta_1=\frac{P_E h}{2}\cdot\frac{2}{3}h=\frac{P_E h^2}{3}=\delta_2$$
$$\Delta_1=\frac{P_E l_1}{EF_1},\quad \Delta_2=\frac{P_E l_2}{EF_2},\quad P_E=\frac{\pi^2 EJ}{l_1^{\,2}}$$

Z warunku nierozdzielności otrzymamy

$$2\frac{P_E h^2}{3EJ}+\frac{P_E l_1}{EF_1}+\frac{P_E l_2}{EF_2}=\alpha\Delta T\left(l_1+l_2\right)\rightarrow\Delta T=\frac{P_E}{\alpha_1\left(l_1+l_2\right)}\left(\frac{2h^2}{3EJ}+\frac{l_1}{EF_1}+\frac{l_2}{EF_2}\right)$$

W rozważaniach tych wykorzystaliśmy fakt, iż równowaga węzła 0 prowadzi do relacji $N_1=N_2=P_E$ gdzie P_E jest mniejszą z wartości sił krytycznych w ryglach 0-1 i 0-2.

W zadaniu teorii starzenia warunek nierozdzielności pozostaje bez zmian, natomiast inne wartości przyjmą wydłużenia i ugięcia

$$\delta_1=\int_0^h A\left(\frac{N_1 s}{J\left(L+1\right)}\right)^m 1sds=A\left(\frac{N_1}{J\left(L+1\right)}\right)^m\frac{h^{m+2}}{m+2},$$
$$\delta_2=\int_0^h A\left(\frac{N_2 s}{J\left(L+1\right)}\right)^m 1sds=A\left(\frac{N_2}{J\left(L+1\right)}\right)^m\frac{h^{m+2}}{m+2}$$
$$\Delta_1=A\left(\frac{N_1}{F_1}\right)^m l_1,\quad \Delta_2=A\left(\frac{N_2}{F_2}\right)^m l_2$$

Podstawiając $\delta_1,\delta_2,\Delta_1$ i Δ_2 do warunków nierozdzielności otrzymamy $N_1=N_2=P_E^{'}$

$$2\frac{Ah^{m+2}}{m+2}\left(\frac{P_E'}{J\left(L+1\right)}\right)^m+Al_1\left(\frac{P_E'}{F_1}\right)^m+Al_2\left(\frac{P_E'}{F_2}\right)^m=\alpha\left(l_1+l_2\right)\Delta T$$

stąd krytyczny przyrost temperatury ΔT wynosi

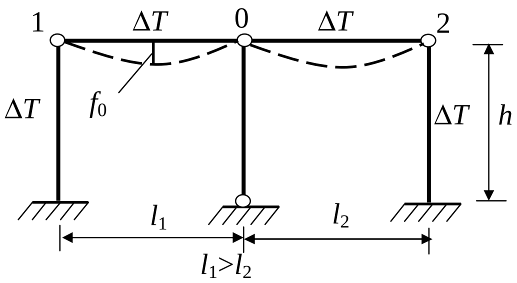
$$\Delta T = \frac{A}{\alpha(l_1 + l_2)}\left[\frac{2h^{m+2}}{m+2}\left(\frac{P_E'}{J(L+1)}\right)^m + l_1\left(\frac{P_E'}{F_1}\right)^m + l_2\left(\frac{P_E'}{F_2}\right)^m\right],$$

$$P_E' = \frac{1}{F_0}\left(\frac{\pi^2[J(L+1)]^m}{Al^2} f_0\right)^{\frac{1}{m}}$$

ZADANIE 4.12.

W ramie stalowej przedstawionej na rys. 4.12a wystąpił przyrost temperatur ΔT w czasie pożaru w takim zakresie, iż w analizie statycznej zadania należy uwzględnić równania lepkiego płynięcia. W szczególności należy oszacować tą wartość prędkości narastania temperatur, która prowadzić będzie do utraty stateczności prętów układu. Równania fizyczne w tym przypadku mają postać

$$F\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{B}\right)^N = \sigma F \rightarrow \left(\frac{N}{F}\right)^n B = \dot{\varepsilon}$$



Rys. 4.12a

Dane: l_1, l_2, h, $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 = B\sigma^n$

$$\dot{\kappa} - \dot{\kappa}_0 = B\left(\frac{M}{J(N+1)}\right)^n, \; n = \frac{l}{N}, \; J(N+1) = \int_F z^{N+1} dF$$

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 = B\left(\frac{N}{F}\right)^n, \qquad P_{kr} = \frac{1}{f_0}\left(P_r \dot{f}_0\right)^N \quad P_{kr} = \frac{\pi^2[J(N+1)]^n}{Bl^2}$$

Rozwiązanie:

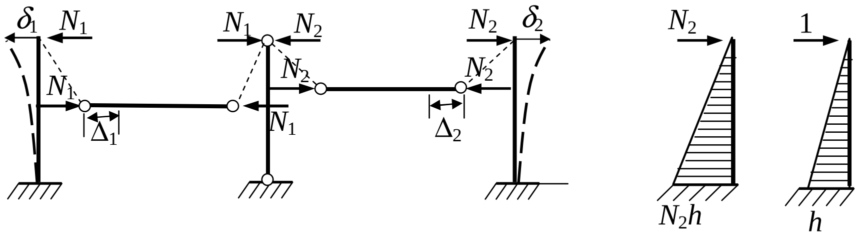
Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Analizując odkształcenia wywołane przyrostem temperatur ΔT stwierdzamy, iż wydłużenia termiczne muszą być równe sumie skróceń prętów poziomych 0-1 i 0-2 oraz ugięć słupów od działania sił w ryglach

$$\alpha_T \Delta T l_1 + \alpha_T \Delta T l_2 = \Delta_1 + \Delta_2 + \delta_1 + \delta_2$$

W zadaniach lepkiego płynięcia analizujemy przyrosty po czasie w warunkach nierozdzielności. Zachodzi wtedy

$$\alpha_T \Delta\dot{T} l_1 + \alpha_T \Delta\dot{T} l_2 = \dot{\Delta}_1 + \dot{\Delta}_2 + \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2$$

Deformacje w układzie przedstawiono na rysunku



Rys. 4.12b

Prędkości odkształceń wynoszą

$$\dot{\Delta}_1 = \left(\frac{N_1}{F_1}\right)^n B l_1, \quad \dot{\Delta}_2 = \left(\frac{N_2}{F_2}\right)^n B l_2$$

Prędkości ugięć obliczymy z całki Mohra

$$\dot{\delta}_1 = \int_0^h B\left(\frac{N_1 s}{J(N+1)}\right)^n 1 s ds = B\left(\frac{N_1}{J(N+1)}\right)^n \frac{h^{n+2}}{n+2}$$

$$\dot{\delta}_2 = B\left(\frac{N_2}{J(N+1)}\right)^n \frac{h^{n+2}}{n+2}$$

Po podstawieniu do warunków nierozdzielności zachodzi

$$\alpha_T \dot{\Delta} T l_1 + \alpha_T \dot{\Delta} T l_2 = \left(\frac{N_1}{F_1}\right)^n B l_1 + \left(\frac{N_2}{F_2}\right)^n B l_2 +$$
$$+\left[\left(\frac{N_1}{J(N+1)}\right)^n + \left(\frac{N_2}{J(N+1)}\right)^n\right] B \frac{h^{n+2}}{n+2}$$

Utrata stateczności nastąpi przy jednakowej wartości $f_0^1 = f_0^2$ w dłuższym z rygli, czyli l_1. Należy wówczas przyjąć, że

$$N_1 = N_2 = P_{kr} = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\pi^2 [J(N+1)]^n}{B l_1^2}\dot{f}_0\right)^N$$

stąd

$$\dot{\Delta} T = \frac{1}{\alpha_T (l_1 + l_2)} \left\langle (P_{kr})^n \left(\frac{B l_1}{F_1^n} + \frac{B l_2}{F_2^n}\right) + \right.$$
$$\left. + (P_{kr})^n \left(\frac{1}{[J_1(N+1)]^n} + \frac{1}{[J_2(N+1)]^n}\right) B \frac{h^{n+2}}{n+2} \right\rangle$$

$$\dot{\Delta} T = \frac{1}{\alpha_T (l_1 + l_2)} \left(\frac{1}{(f_0)^n} \frac{\pi^2 [J(N+1)]^n \dot{f}_0}{B l_1^2}\right) \left[\frac{B l_1}{(F_1)^n} + \frac{B l_2}{(F_2)^n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{[J_1(N+1)]^n} + \frac{1}{[J_2(N+1)]^n}\right) B \frac{h^{n+2}}{n+2}\right] = \Omega(t)$$

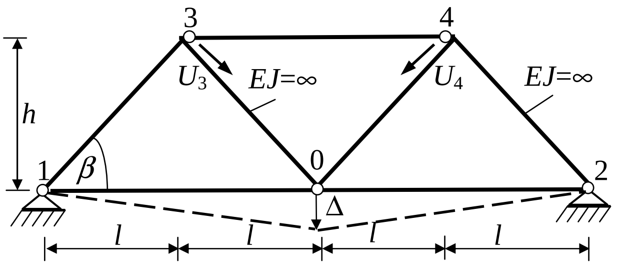
Mając ustaloną temperaturę początkową procesu płynięcia lepkiego, równą około 1/3 temperatury topnienia wyznaczymy krytyczną wartość przyrostu temperatury do utraty stateczności

$$\Delta T = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau + T_0$$

Należy podkreślić, iż rozwiązanie to stanowi wstępne oszacowanie ΔT_{kr}.

ZADANIE 4.13.

Określić dla jakich wartości pionowego przemieszczenia środkowej podpory 0 wystąpi utrata stateczności pręta poziomego 3-4. Pręty układu, za wyjątkiem poziomego rygla 3-4 należy uznać za nieodkształcalne.



Rys. 4.13

Rozwiązanie

Osiadanie podpory środkowej o wartość Δ wywołuje wzajemny obrót prętów 1-3 i 2-4 względem punktów 1 i 2 o wartość $\varphi = \dfrac{\Delta}{2l}$. W wyniku tego obrotu punkty 3 i 4 ulegną przemieszczeniu

$$U_3 = \varphi\sqrt{l^2+h^2} = \frac{\Delta}{2l}\sqrt{l^2+h^2} = U_4$$

Natomiast wzajemne przybliżenie węzłów 3 i 4 obliczamy z wzoru

$$\lambda = U_3 \sin\beta + U_4 \sin\beta \quad \text{gdzie} \quad \sin\beta = \frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

$$\lambda = \frac{\Delta}{2l}\sqrt{l^2+h^2}\,\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}} + \frac{\Delta}{2l}\sqrt{l^2+h^2}\,\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}} = \frac{\Delta}{l}h$$

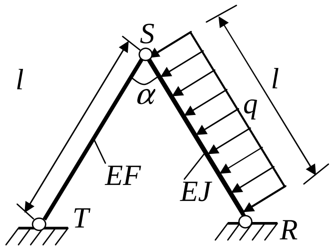
Z drugiej strony skrócenie pręta poziomego o wartość λ_K wywołuje siła $P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$, która powoduje utratę stateczności pręta 3-4. Zachodzi więc warunek utraty stateczności

$$\lambda \geq \lambda_{kr} = \frac{P_E\, 2l}{EF} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta}{l}h \geq \frac{\pi^2 EJ\, 2l}{(2l)^2\, EF} \quad \rightarrow \quad \Delta \geq \frac{\pi^2 J}{2Fh}$$

pręta poziomego 3-4 w wyniku osiadania podpory 0 o wartość krytyczną Δ_{kr}.

ZADANIE 4.14.

W podanym układzie prętowym statycznie wyznaczalnym którego schemat przedstawiono na rys. 4.14a, należy określić wartość obciążenia krytycznego $q=q_{kr}$.



Rys. 4.14a

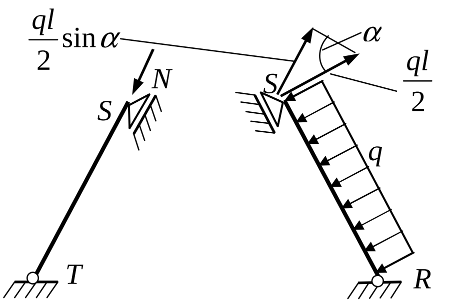
Dane: l, EF, EJ

Szukane: $q_{kr}=?$

Kąt α między prętami T-S i S-R jest kątem ostrym.

Rozwiązanie:

W analizowanym układzie wyboczeniu ulegnie pręt T-S. Sposób postępowania w tym przypadku jest następujący: „rozbijamy” układ na dwa podukłady -belkę S-R oraz ściskany słup S-T.



Rys. 4.14b

Obciążenie normalne działające na pręt S-R wywołuje siłę osiową w pręcie S-T

$$N = \frac{ql}{2}\sin\alpha$$

Siłę tą porównujemy z eulerowską siłą krytyczną uzyskując w ten sposób zależność

$$N = \frac{ql}{2}\sin\alpha = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

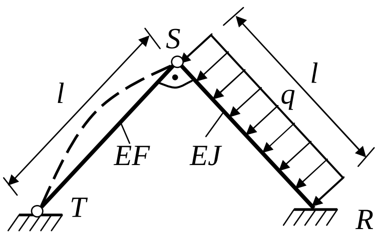
Otrzymujemy stąd poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego $q = q_{kr}$.

$$q_{kr} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^3 \sin\alpha}$$

Z wzoru tego wynika, iż dla małych kątów α q_{kr} będzie rosło. Natomiast najmniejszą wartość q_{kr} otrzymamy, kiedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

ZADANIE 4.15.

Obliczyć wartość obciążenia krytycznego q_{kr} w układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym przedstawionym na rys. 4.15a



Rys. 4.15a

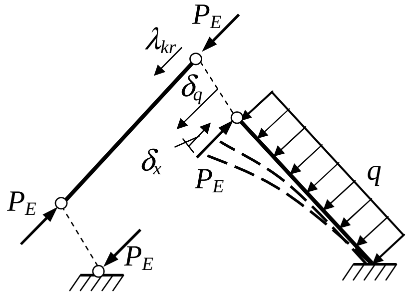
Rozwiązanie:
Sposób postępowania jest typowy jak w zadaniach jednokrotnie statycznie niewyznaczalnych. Korzysta się tu z warunku utraty stateczności pręta T-S, kiedy siła osiowa w tym pręcie

$$N = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = N_K$$

Równanie nierozdzielności dla analizowanego zadania $\delta_q - \delta_x = \lambda_{kr}$,

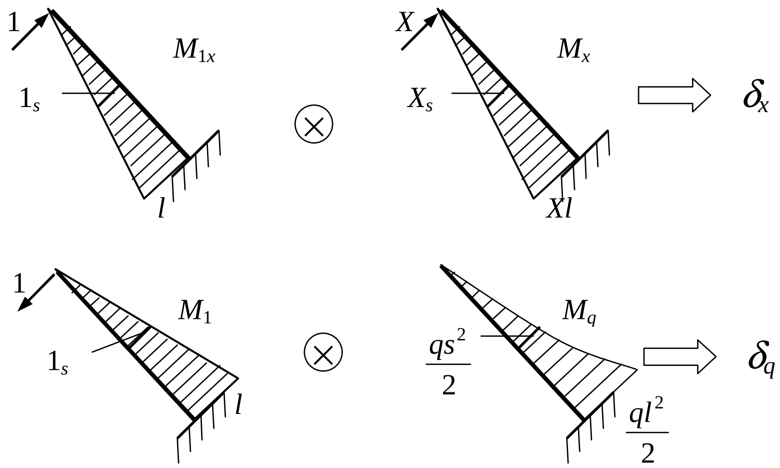
gdzie δ_q – przemieszczenie pręta S-R od obciążenia ciągłego q, δ_x – przemieszczenie pręta S-R od siły krytycznej, λ_{kr} – skrócenie pręta S-T od siły krytycznej.

Warunek przedstawiono na rys. 4.15b



Rys. 4.15b

Wartości δ_q, δ_x otrzymujemy z „przemnożenia” wykresów



Rys. 4.15c

Otrzymujemy

$$\delta_q = \int_s \frac{M_q M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} l \frac{3}{4} l\right) = \frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\delta_x = \int_s \frac{M_x M_{1X}}{EJ} ds = \frac{-1}{EJ}\left(\frac{1}{2} Xl \cdot l \frac{2}{3} l\right) = \frac{-Xl^3}{3EJ}$$

Podstawiając otrzymane wartości do warunku nierozdzielności uzyskamy równanie z niewiadomym obciążeniem krytycznym

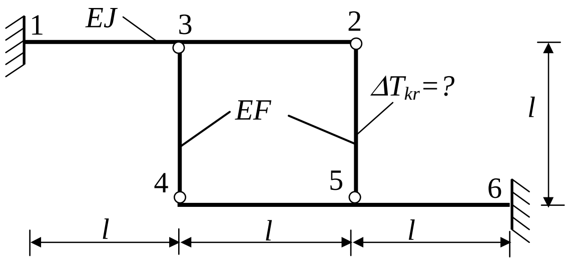
$$\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Xl^3}{3EJ} = \frac{Xl}{EF} \quad \text{gdzie} \quad X = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_E$$

stąd

$$q_{kr} = \frac{8\pi^2 EJ}{l^3}\left(\frac{J}{l^2 F} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi^2 EJ}{l^3}\left(s^2 + \frac{1}{3}\right), \quad s = \frac{i}{l}, \quad i^2 = \frac{J}{F}$$

ZADANIE 4.16.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym należy określić wartość temperatury krytycznej ΔT_{kr}.



Rys. 4.16a

Dane: EF, EJ

Szukane: $\Delta T_{kr}=?$

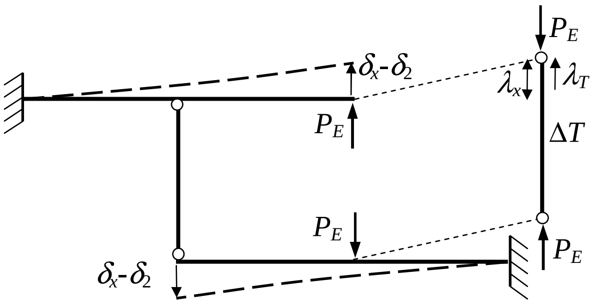
Rozwiązanie:

W przedstawionym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 2-5. Warunek utraty stateczności wynika z analizy stanu względnych przemieszczeń końców tego pręta.

Wymagamy, aby wydłużenie pręta 2-5 od temperatury $\lambda_T = \alpha_T \Delta T l$ i skrócenie od siły krytycznej $\lambda_X = \frac{P_E l}{EF}$, gdzie $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{(l_w)^2}$, było równe dwukrotnej różnicy przemieszczeń pręta poziomego 1-2 wywołanej siłą P_E i siłą X_2. Warunek nierozdzielności tego układu ma postać

$$\lambda_T - \lambda_X = 2(\delta_X - \delta_2)$$

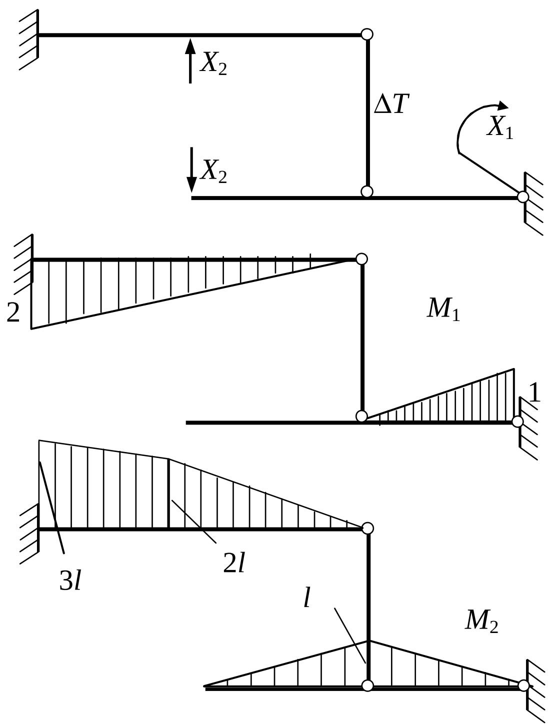
Przytoczony sposób rozważań przedstawiono na poniższych rysunkach



Rys. 4.16b

Siłę X_2 obliczymy korzystając z równań metody sił

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} + \delta_{1T} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} + \delta_{2T} = 0 \end{cases}$$



Rys. 4.16c

Po sporządzeniu wykresów M_1 i M_2 należy obliczyć odpowiednie współczynniki do równania metody sił. Obliczymy je z „przemnożenia" odpowiednich wykresów, przy czym δ_{ij} otrzymujemy z „przemnożenia" wykresów $M_i \otimes M_j$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\left(2 \cdot 2l\,\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\left(1 \cdot l \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{9}{3EJ}\,l = 3\frac{l}{EJ}$$

δ_{22} otrzymamy korzystając z metody graficznej Simpsona

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\frac{l}{6}\left(3l \cdot 3l + 4 \cdot 2{,}5l \cdot 2{,}5l + 2l \cdot 2l\right) + \frac{1}{EJ}\frac{l}{6}\left(2l \cdot 2l + 4l^2\right) +$$
$$+ \frac{2l}{6EJ}\left(l \cdot l + 4 \cdot 0{,}5l \cdot 0{,}5l\right) = \frac{l}{6EJ}\left(9l^2 + 25l^2 + 4l^2\right) + \frac{l}{6EJ}\left(8l^2\right) +$$
$$+ \frac{2l}{6EJ}\left(l^2 + l^2\right) = \frac{25l^3}{3EJ}$$

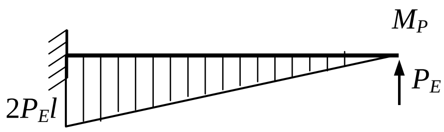
$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(2 - \frac{s}{l}\right)(3l - s)\,ds + \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\left(1 \cdot l \cdot \frac{4}{3}l\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{EJ}\left(l \cdot \frac{l}{3}\right) = \frac{13l^2}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad \rightarrow \quad \delta_{21} = \frac{13l^2}{3EJ}$$

$$\delta_{1T} = 0$$

$$\delta_{2T} = 0$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\left(2 \cdot 2l \cdot \frac{4}{3}P_E\,l\right) = \frac{8P_E l^2}{3}\frac{1}{EJ} = \frac{8P_E l^2}{3EJ}$$



Rys. 4.16d

$$\delta_{2P} = \frac{l}{6EJ}\left(3l \cdot 2P_E l + 4 \cdot 1{,}5P_E \cdot l \cdot 2{,}5l + 2l \cdot P_E \cdot l\right) +$$
$$+ \frac{l}{6EJ}\left(2l \cdot P_E \cdot l + 4 \cdot 0{,}5P_E \cdot l \cdot l + 0\right) = \frac{9P_E l^3}{2EJ}$$

Po obliczeniu współczynników należy ich wartości podstawić do równań

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} + \delta_{1T} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} + \delta_{2P} = 0$$

Powyższy układ równań rozwiązujemy za pomocą wyznaczników

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3l}{EJ} & \frac{13l^2}{3EJ} \\ \frac{13l^2}{3EJ} & \frac{25l^3}{3EJ} \end{bmatrix} = \frac{56l^4}{9(EJ)^2}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{8P_E l^2}{3EJ} & \frac{13l^2}{3EJ} \\ \frac{9P_E l^3}{2EJ} & \frac{25l^3}{3EJ} \end{bmatrix} = \frac{49P_E l^5}{18(EJ)^2}$$

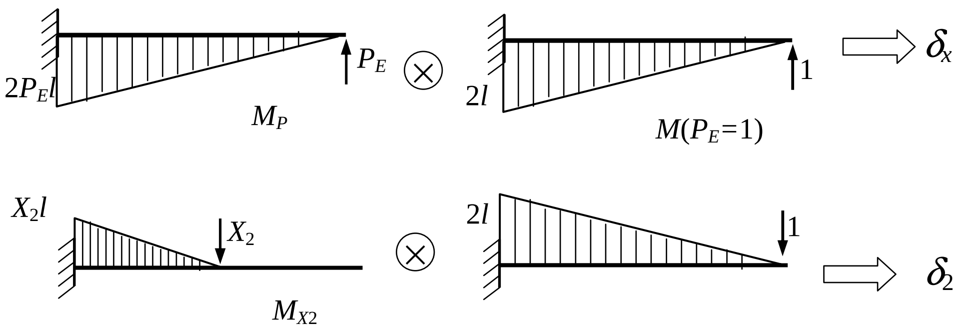
$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{3l}{EJ} & \frac{-8P_E l^2}{3EJ} \\ \frac{13l^2}{3EJ} & \frac{9P_E l^3}{2EJ} \end{bmatrix} = \frac{35P_E l^4}{18(EJ)^2}$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$X_1 = \frac{7}{16} P_E l$$

$$X_2 = \frac{5}{16} P_E l$$

Po rozwiązaniu układu przystępujemy do obliczenia pozostałych równań tj.δ_X i δ_2. Te składowe obliczymy poprzez „przemnożenie” odpowiednich wykresów M_P, $M(P_E = 1)$, M_{X2}, M_1



Rys. 4.16e

$$\delta_X = \frac{1}{2EJ}\left(2P_E l\cdot 2l\cdot\frac{4}{3}l\right)=\frac{8P_E l}{3EJ}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{6EJ}\left(X_2 l\cdot 2l+4\cdot 0{,}5X_2 l\cdot 1{,}5l\right)=\frac{1}{6EJ}\left(2X_2 l^2+3X_2 l^2\right)=\frac{5X_2 l^3}{6EJ}$$

$$\delta_X-\delta_2=\frac{8P_E l^3}{3EJ}-\frac{5X_2 l^3}{6EJ}=\frac{16P_E l^3-5X_2 l^3}{6EJ}=\frac{77P_E l^3}{32EJ}$$

Podstawiając i korzystając ze wzorów λ_T i λ_X obliczymy temperaturę krytyczną

$$\alpha_T \varDelta Tl-\frac{P_E l}{EF}=\frac{77P_E l^3}{16EJ}$$

$$\varDelta T=\frac{P_E}{\alpha_T}\left(\frac{1}{EF}+\frac{77l^2}{16EJ}\right)=\frac{\pi^2 EJ}{\alpha_T l^2}\left(\frac{1}{EF}+\frac{77l^2}{16EJ}\right)$$

$$\varDelta T=\frac{\pi^2}{\alpha_T}\left[\left(\frac{i}{l}\right)^2+\frac{77}{16}\right]$$